07.11.23

Математика

Тема: «Параллельность в пространстве»

Аксиомы стереометрии:

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.
2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Следствия из аксиом стереометрии:

- **Сл. 1.** Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.
- **Сл. 2.** Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.
- **Сл. 3.** Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

Взаимное расположение прямых и плоскостей в стереометрии

Определение1: две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Если прямые *a* и *b*, либо *AB* и *CD* параллельны, то пишут:

$$a \parallel b \qquad AB \parallel CD$$

- **Теорема 1.** Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.
- **Теорема 2** (признак параллельности прямых). Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.
- **Теорема 3 (обратная теореме 2)** Если одна из двух параллельных прямых параллельна третьей прямой, то вторая тоже параллельна третьей прямой.
- **Теорема 4** Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

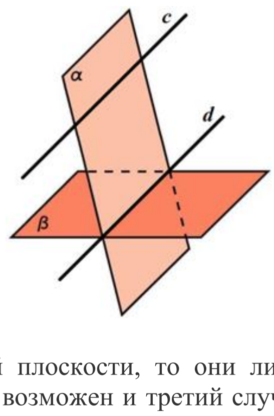
Возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в стереометрии:

- Прямая лежит в плоскости (каждая точка прямой лежит в плоскости).
- Прямая и плоскость пересекаются (имеют единственную общую точку).
- Прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.

Определение2: Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек. Если прямая *a* параллельна плоскости β, то пишут:

$$a \parallel \beta$$

- **Теорема 5** (признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.
- **Теорема 6** Если плоскость (на рисунке – α) проходит через прямую (на рисунке – *c*), параллельную другой плоскости (на рисунке – β), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей (на рисунке – *d*) параллельна данной прямой:



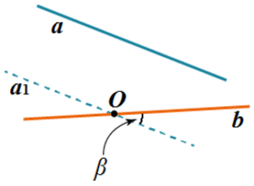
$$d \parallel c$$

Если две различные прямые лежат в одной плоскости, то они либо пересекаются, либо параллельны. Однако, в пространстве (т.е. в стереометрии) возможен и третий случай, когда не существует плоскости, в которой лежат две прямые (при этом они и не пересекаются, и не параллельны).

Определение3: Две прямые называются **скрещивающимися**, если не существует плоскости, в которой они обе лежат.

- **Теорема 7** (признак скрещивающихся прямых). Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.
- **Теорема 8** Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.

Определение 4: Пусть a и b – две скрещивающиеся прямые. Возьмем произвольную точку O на одной из них (в нашем случае, на прямой b) и проведем через неё прямую параллельную другой из них (в нашем случае a_1 параллельна a). **Углом между скрещивающимися прямыми** a и b называется угол между построенной прямой и прямой, содержащей точку O (в нашем случае это угол β между прямыми a_1 и b).



Определение5: Две прямые называются **взаимно перпендикулярными** (перпендикулярными), если угол между ними равен 90°. Перпендикулярными могут быть как скрещивающиеся прямые, так и прямые лежащие и пересекающиеся в одной плоскости. Если прямая a перпендикулярна прямой b, то пишут:

$$a \perp b$$

Определение6: Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются, т.е. не имеют общих точек. Если две плоскости α и β параллельны, то, как обычно, пишут:

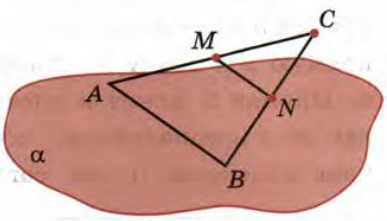
$$\alpha \parallel \beta$$

- **Теорема 9** (признак параллельности плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
- **Теорема10** (о свойстве противолежащих граней параллелепипеда). Противолежащие грани параллелепипеда лежат в параллельных плоскостях.
- **Теорема 11** (о прямых пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью). Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые их пересечения параллельны между собой.
- **Теорема 12** Отрезки параллельных прямых, расположенные между параллельными плоскостями, равны.
- **Теорема 13** (о существовании единственной плоскости, параллельной данной плоскости и проходящей через точку вне ее). Через точку, не лежащую в данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

Заполнить пропуски (другим цветом)

9

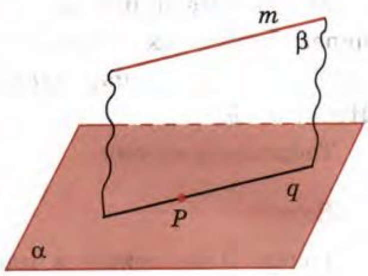
Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α, а вершина $C \notin \alpha$, точки M и N — середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая $MN \parallel \alpha$.



Доказательство. Так как MN — средняя линия ________________, то $MN \parallel AB$, а потому, согласно ____, $MN \parallel \alpha$.

10

На рисунке $m \parallel \alpha$, $P \in \alpha$. Докажите, что в плоскости α существует прямая, проходящая через точку P и параллельная прямой m.



Доказательство. Прямая m и не лежащая __________ точка P задают некоторую ___________________ β. Так как $P \in \alpha$ и $P \in \beta$, то, согласно __________________, плоскости α и β ______________________ по некоторой прямой q, проходящей через __________________. Докажем, что q — искомая прямая. Плоскость β проходит через прямую m, параллельную _________________________, и пересекает __________________ по прямой q, следовательно, ________